УДК 614.84:664

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-матем. наук, С.А.ЕРЕМЕНКО,
А.П.САФРОНОВА, канд. физ.-матем. наук, В.А.ГУТОРОВ, канд. филол. наук
Харьковский институт пожарной безопасности МВД Украины

О ВЛИЯНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ В ОЧАГЕ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛАСТОВОГО САМОНАГРЕВАНИЯ СЫРЬЯ

Изучено влияние распределений, заданных показательной и дробно-рациональной функциями, на температурное поле самонагревания насыпи в силосе.

1. *Постановка задачи.* В [1] при численном решении нестационарных задач теплопроводности применительно к самонагреванию сырья плотности внутренних тепловых источников задавались экспоненциальной и дробно-рациональными функциями. Поэтому будет целесообразным дополнить имеющиеся численные решения в виде графиков и таблиц аналитическими результатами. Далее представим их рядами ускоренной сходимости, которые находим интегрированием температурной функции влияния. В качестве последней берем простейший вариант функции Грина из работы [2]

$$f(x,\xi,t) = \frac{8l}{\lambda F \pi^2}\left[f_3(x,\xi) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} e^{-\beta_m^2 at} \sin(\beta_m \xi)\sin(\beta_m x)\right]. \quad (1.1)$$

Здесь $$f_3(x,\xi) = \frac{\pi^2}{8l}\begin{cases} x & \text{при} \quad 0 \le x \le \xi \\ \xi & \quad\quad\;\; \xi \le x \le l, \end{cases} \quad (1.2)$$

$\beta_m = (2m-1)\pi(2l)^{-1}$; $a = \lambda/(\rho c)$; λ, ρ, c – соответственно коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость сырья; F – площадь поперечного сечения насыпи; x – пространственная координата, отсчитываемая по оси силоса от нижнего основания $x = 0$ до верхнего основания насыпи $x = l$; t – время.

При задании линейной плотности тепловых источников в очаге произведением $q_0(x,t) = q(x)\omega(t)$, где $\omega(t)$ – функция Хевисайда, прирост температуры самонагревания сырья $T(x,t)$ представляется интегралом

$$T(x,t) = \omega(t)\cdot\int_0^l q(\xi) f(x,\xi,t)d\xi + \frac{q_{\phi}\cdot t}{\rho c}. \quad (1.3)$$

Здесь q_{ϕ} – фоновая объемная плотность тепловых источников.

Вычислим (1.3) для названных выше функций $q(x)$.

2. *Температурное поле при экспоненциальном распределении тепловых источников.*

Пусть функция $q(x)$ имеет вид [1]

$$q(x) = q_1 \cdot \exp\left(-(x - x_1)^2 \cdot R^{-2}\right). \qquad (2.1)$$

Здесь $q_1 = q(x_1)$ – линейная плотность источников в центре очага; x_1, R – геометрические параметры. Первый определяет абсциссу поперечного сечения насыпи, в котором находится центр очага, а второй характеризует его размер. Чем меньше R, тем сильнее тепловой источник локализован у сечения $x = x_1$.

Функция (2.1) соответствует нормальному вероятностному распределению плотности термически активных микроорганизмов по высоте насыпи, которые вызывают самонагревание [1].

Подставив выражения (1.1) и (2.1) в (1.3), получаем ($t \geq 0$)

$$T(x,t) = \frac{8lq_1}{\lambda F \pi^2}\left[S(x) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_m}{(2m-1)^2}e^{-\beta_m^2 at}\sin(\beta_m x)\right]\frac{q_\phi \cdot t}{\rho c}. \qquad (2.2)$$

Здесь

$$S(x) = \int_0^l f_3(x,\xi)\exp\left(-(\xi - x_1)^2 R^{-2}\right)d\xi; \qquad (2.3)$$

$$I_m = \int_0^l \exp\left(-(\xi - x_1)^2 R^{-2}\right)\cdot \sin(\beta_n \xi)d\xi. \qquad (2.4)$$

Интеграл (2.3) выражается через табулированные функции. Действительно, подставив (1.2) в (2.3), имеем

$$S(x) = \frac{\pi^2}{8l}\left(\int_0^x \xi \exp\left(-(\xi - x_1)^2 R^{-2}\right)d\xi + x\int_x^l \exp\left(-(\xi - x_1)^2 R^{-2}\right)d\xi\right).$$

Заменой переменной $u = (\xi - x_1)R^{-1}$ и интегрированием по частям далее сводим $S(x)$ к табулированному интегралу вероятностей [3]

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-u^2)du.$$

Эти преобразования дают

$$S(x)=\frac{\pi^2R^2}{16l}\left\{\exp\left(-\frac{x_1{}^2}{R^2}\right)-\exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{R^2}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{R}\times\right.$$

$$\left.\times\left[x_1\left(\Phi\left(\frac{x-x_1}{R}\right)+\Phi\left(\frac{x_1}{R}\right)\right)+x\left(\Phi\left(\frac{l-x_1}{R}\right)-\Phi\left(\frac{x-x_1}{R}\right)\right)\right]\right\}. \qquad (2.5)$$

Заметим, что при расчете $T(x,t)$ на ЭВМ интеграл $\Phi(z)$ удобно находить с помощью аппроксимации его дробно-рациональными функциями [3, 4]. При этом отпадает необходимость в специальных таблицах.

Вычисление квадратуры (2.4) удается упростить для случая, когда очаг локализован у средней части насыпи по высоте. При таком варианте самонагревания и $R << l$ можно положить

$$I_m=R\int\limits_{x_1/R}^{(l-x_1)/R}\exp(-u^2)\sin(\beta_m(Ru+x_1))du\approx$$

$$\approx 2R\cdot\sin(\beta_m\cdot x_1)\cdot\int\limits_0^{\infty}\exp(-u^2)\cos(\beta_m Ru)du\,.$$

Последний интеграл выражается через элементарные функции [5]. Поэтому

$$I_m\approx\sqrt{\pi}R\cdot\exp\left(-\frac{\beta_m^2R^2}{4}\right)\sin(\beta_m x_1). \qquad (2.6)$$

Таким образом, решение (2.2) с учетом выражений (2.5) и (2.6) представляется суммой замкнутой составляющей, не зависящей от t и тригонометрического ряда ускоренной сходимости за счет множителя $\exp\left(-\beta_m^2\left(at+R^2/4\right)\right)$.

3. *Температурные поля при аппроксимации распределения тепловых источников дробно-рациональными функциями.*

В качестве такой возьмем [1]

$$q(x)=q_1\frac{R^2}{R^2+(x-x_1)^2}. \qquad (3.1)$$

Константы q_1, R, x_1 имеют прежний смысл.

Для распределения (3.1) в решении (2.2) изменяются $S(x)$ и I_m.

Подставив формулу (3.1) в (2.3), интегрированием находим

$$S(x)=\frac{\pi^2 R^2}{8l}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(x-x_1)^2+R^2}{x_1^2+R^2}+\frac{x_1}{R}\left(arctg\frac{x-x_1}{R}+arctg\frac{x_1}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{x}{R}\left(arctg\frac{l-x_1}{R}-arctg\frac{x-x_1}{R}\right)\right]. \qquad (3.2)$$

Вычисление интеграла

$$I_m=\int_0^l \frac{R^2\sin(\beta_m\xi)}{(\xi-x_1)^2+R^2}d\xi$$

можно упростить для случая, когда очаг самонагревания локализован у средней части насыпи. При таком варианте самонагревания I_m приближенно выражается через элементарные функции [5]:

$$I_m\approx 2R^2\sin(\beta_m x_1)\int_0^\infty \frac{\cos(\beta_m\xi)}{\xi^2+R^2}d\xi=\pi R\exp(-\beta_m R)\sin(\beta_m x_1). \quad (3.3)$$

В результате решение (2.2) с учетом выражений (3.2) и (3.3) преобразуется к сумме замкнутой составляющей $S(x)$ и тригонометрического ряда ускоренной сходимости.

Эта форма решения сохраняется и при [1]:

$$q(x)=q_1R^4\left((x-x_1)^4+R^4\right)^{-1}. \qquad (3.4)$$

Действительно, подставив выражение (3.4) в (2.3), с учетом того, что [5]

$$\int\frac{dx}{x^4+R^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}R^3}\left[\ln\frac{x^2+R\sqrt{2}x+R^2}{x^2-R\sqrt{2}x+R^2}+2arctg\left(\frac{x\sqrt{2}}{R}-1\right)+\right.$$

$$\left.+arctg\left(\frac{x\sqrt{2}}{R}+1\right)\right],$$

$$\int\frac{xdx}{x^4+R^4}=\frac{1}{2R^2}arctg\frac{x^2}{R^2},$$

находим

$$S(x)=\frac{\pi^2R^2}{16l}\left\{arctg\frac{(x-x_1)^2}{R^2}-arctg\frac{x_1^2}{R^2}+\frac{x_1}{2\sqrt{2}R}\times\right.$$

$$\times\left[\ln\frac{\left((x-x_1)^2+R\sqrt{2}(x-x_1)+R^2\right)\cdot\left(x_1^2+R\sqrt{2}x_1+R^2\right)}{\left((x-x_1)^2-R\sqrt{2}(x-x_1)+R^2\right)\cdot\left(x_1^2-R\sqrt{2}x_1+R^2\right)}+\right.$$

$$\left.+2arctg\left(\frac{x_1\sqrt{2}}{R}+1\right)+2arctg\left(\frac{x_1\sqrt{2}}{R}-1\right)\right]+\frac{x}{2\sqrt{2}R}\times$$

$$\times\left[\ln\frac{\left((l-x_1)^2+R\sqrt{2}(l-x_1)+R^2\right)\cdot\left((x-x_1)^2-R\sqrt{2}(x-x_1)+R^2\right)}{\left((l-x_1)^2-R\sqrt{2}(l-x_1)+R^2\right)\cdot\left((x-x_1)^2+R\sqrt{2}(x-x_1)+R^2\right)}+\right.$$

$$\left.+2arctg\left(\frac{(l-x_1)\sqrt{2}}{R}-1\right)+2arctg\left(\frac{(l-x_1)\sqrt{2}}{R}+1\right)\right]+\frac{x_1-x}{R\sqrt{2}}+$$

$$\left.+\left[arctg\left(\frac{(x-x_1)\sqrt{2}}{R}-1\right)+arctg\left(\frac{(x-x_1)\sqrt{2}}{R}+1\right)\right]\right\}.$$

Определенный интеграл I_m при $x_1 \to l/2, R << l$ приближенно выражается через элементарные функции соотношением

$$I_m \approx \frac{\pi R}{\sqrt{2}}\sin(\beta_m x_1)\exp\left(-\frac{\beta_m R}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\frac{\beta_m R}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\beta_m R}{\sqrt{2}}\right).$$

Поэтому расчет температурного поля, порожденного распределением тепловых источников по закону (3.4), также не вызывает затруднений.

Целесообразно введенные в [1] плотности источников (3.1) и (3.4) дополнить выражением

$$q(x)=q_1R^4\left((x-x_1)^2+R^2\right)^{-2}. \tag{3.5}$$

Ему соответствует

$$S(x)=\frac{\pi^2R^2}{16l}\left[x\frac{l-x_1}{(l-x_1)^2+R^2}+\frac{x_1}{R}\left(arctg\frac{x-x_1}{R}+arctg\frac{x_1}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{x}{R}\left(arctg\frac{l-x_1}{R}-arctg\frac{x-x_1}{R}\right)\right].$$

Здесь при получении функции $S(x)$ учтено, что

$$\int \frac{dx}{(x^2+R^2)^2} = \frac{1}{2R^3}\left(\frac{xR}{x^2+R^2} + arctg\frac{x}{R}\right);$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+R^2\right)^2} = -\frac{1}{2(x^2+R^2)}.$$

Если $x \to l/2$, $R << l$, то

$$I_m \approx \frac{\pi R}{\sqrt{2}}(1+\beta_m R)\exp(-\beta_m R)(\sin\beta_m x_1).$$

Задание плотности источников в форме (3.5) приводит к более простым решениям, чем задание их в форме (3.4). При этом распределение (3.5) отличается более высокой степенью локализации теплового очага.

4. *Результаты расчетов.* Они получены для насыпи травяной муки при $\lambda = 0{,}09$ ВТ/(мк); $\rho c = 8{,}5\cdot 10^5$ Дж/(м^{3}к).

В табл.1 приведены значения $T(x,t)$ в ^{0}С, вычисленные при $q_ф$ =5 ВТ/(м^3); $l = 30$ м; $x_1 = 15$ м, и различных q_1, R, t, x. Результаты, записанные в числителях, получены с помощью ряда (2.2). Для сравнения в знаменателях выписаны результаты вычислений из работы [4].

Таблица 1 – Значения $T(x,t)$ в ^{0}С, вычисленные двумя способами

x, м	R = 0,1 м t = 59 суток q_1/F = 75 Вт/м^3 распределения:				R = 0,3 м t = 30 суток q_1/F = 55 Вт/м^3 распределения:			
	(2.1)	(3.1)	(3.4)	(3.5)	(2.1)	(3.1)	(3.4)	(3.5)
15	87,18 / 87,2	114,92 / 115,5	100,52 / 100,5	80,32 / –	87,65 / 87,7	99,48 / 103.1	100,92 / 100,9	78,58 / –
15,4	66,28 / 66,3	89,86 / 90,5	75,54 / 75.5	62,17 / –	62,46 / 62,5	77,40 / 81,3	73,85 / 73,9	56,05 / –
15,8	49,53 / 49,5	64,33 / 65,0	54,59 / 54,6	47,38 / –	34,60 / 34,6	47,71 / 51,9	40,70 / 40,7	32,87 / –
16,2	39,49 / 39,5	47,75 / 48,40	41,98 / 42,0	38,47 / –	21,68 / 21,7	29,07 / 33,6	24,25 / 24,2	21,48 / –
16,6	34,13 / 34,1	38,31 / 39,1	35,23 / 35,2	33,70 / –	16,98 / 17,0	19,61 / 24,5	17,91 / 17,9	17,11 / –
17,0	31,60 / 31,6	33,46 / 34,3	32,03 / 32,0	31,43 / –	15,62 / 15,6	15,12 / 20,3	15,93 / 16,0	15,74 / –

Там они получены путем численного интегрирования температурной функции влияния, построенной для насыпи бесконечной высоты. Приросты температур, найденные двумя способами, незначительно разнятся между собой, несмотря на то, что первым методом они вычислялись для силоса конечной высоты, а вторым – для бесконечного силоса. Расчеты показывают, что закон распределения тепловых источников существенно влияет на значения избыточной температуры в окрестности центра очага. С удалением от локализованного очага это влияние ослабевает.

О том, как сходится ряд (2.2), позволяют судить данные табл.2, где указаны приросты температуры $T(x_1, t)$ в ^{0}C, вычисленные для различных t и прежних остальных параметров, с удержанием в частичной сумме ряда (2.2) N членов. Расчеты свидетельствуют, что погрешность вычислений будет меньше 1%, если в частичной сумме брать 80 членов. С ростом t сходимость ряда убыстряется.

Таблица 2 – Значения $T(x_1, t)$ в ^{0}C, вычисленные с удержанием N членов ряда (2.2)

N членов	R = 0,1 м, q_1/F = 75 Вт/м^3, распределения:				R = 0,3 м, q_1/F = 55 Вт/м^3, распределения:			
	(2.1)	(3.1)	(3.4)	(3.5)	(2.1)	(3.1)	(3.4)	(3.5)
t = 10 суток								
5	92,72	138,74	113,67	82,33	180,62	229,40	217,76	158,48
10	50,32	68,76	60,60	44,80	88,37	96,14	103,28	77,46
20	32,03	40,49	37,78	28,66	49,78	49,27	56,45	44,13
40	26,85	33,36	31,38	24,13	40,00	40,10	45,19	35,89
80	26,46	32,91	30,92	23,80	39,48	39,73	44,64	35,44
160	26,46	32,91	30,92	23,80	39,48	39,73	44,64	35,44
t = 20 суток								
5	100,02	147,66	121,54	89,38	190,59	242,52	228,95	167,88
10	59,69	81,06	71,05	53,68	102,81	115,63	120,03	90,79
20	44,58	57,67	52,20	40,34	70,90	76,68	81,26	63,22
40	41,93	53,99	48,93	38,03	65,84	71,84	75,40	58,94
80	41,89	53,93	48,87	37,98	65,77	71,79	75,32	58,88
160	41,89	53,93	48,87	37,98	65,77	71,79	75,32	58,88
t = 30 суток								
5	107,31	156,55	129,38	96,41	200,51	255,56	240,09	177,25
10	68,93	93,15	81,33	62,44	116,97	134,70	136,41	103,87
20	56,37	73,68	65,67	51,36	90,43	102,16	104,14	80,92
40	54,94	71,68	63,90	50,10	87,66	99,48	100,93	78,59
80	54,94	71,67	63,90	50,10	87,65	99,48	100,92	78,58
160	54,94	71,67	63,90	50,10	87,65	99,48	100,92	78,58

В табл.3 приведены приросты температур в центре очага, полученные в различные моменты времени для рассмотренных распределений. Анализ показывает, что распределения (3.10) и (3.4) дают более быстрый рост температуры самонагревания, чем распределения (2.1) и (3.5).

Таблица 3 – Значения $T(x_1, t)$ в ^{0}C, вычисленные для различных t

x, м	$R = 0,1$ м, $q_1/F = 75$ Вт/м^3 распределения:				$R = 0,3$ м, $q_1/F = 55$ Вт/м^3 распределения:			
	(2.1)	(3.1)	(3.4)	(3.5)	(2.1)	(3.1)	(3.4)	(3.5)
5	16,68	19,73	19,41	14,90	22,93	20,64	25,49	20,80
10	26,46	32,91	30,92	23,80	39,48	39,73	44,64	35,44
20	41,89	53,93	48,87	37,98	65,77	71,79	75,32	58,89
30	54,94	71,67	63,89	50,10	87,65	99,48	100,92	78,58

В [6] для вычисления прироста температуры в центре очага при распределении источников по закону (2.1) предложена формула

$$T(t) = \frac{q_1 R}{2\lambda}\left(\sqrt{R^2 + 4at} - R\right) + \frac{q_\phi t}{\rho c}. \tag{4.1}$$

Вычисления по этой формуле дают значения $T(x_1, t)$, которые полностью совпадают с указанными в табл.3 для распределения (2.1).

Таким образом, в случае расположения очага вдали от торцов силоса и распределения термически активных частиц в нем по закону Гаусса прирост температуры в очаге можно находить по формуле (4.1), минуя численное суммирование рядов на персональном компьютере.

1.Вогман Л.П., Горшков В.И., Дегтярев А.Г. Пожарная безопасность элеваторов. - М.: Стройиздат, 1993. - 288 с.

2.Ольшанский В.П., Криса И.А., Еременко С.А., Мамон В.П. Функция Грина в температурной задаче пластового самонагревания растительного сырья // Науковий вісник будівництва. Вип. 7. – Харків: ХДТУБА, 1999. – С. 228-236.

3.Абрамовиц А., Стиган Н. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

4.Ольшанский В.П. К расчету пластового самонагревания растительного сырья в силосе // Проблемы пожарной безопасности. Сб. науч. тр. Вып. 5. – Харьков: Харьк. ин-т пожарной безопасности, 1999. – С. 159-162.

5.Градштейн И.М., Рыжик И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. – 1108 с.

6.Ольшанский В.П. К вычислению времени достижения пожароопасной температуры самонагревания сырья // Науковий вісник будівництва. Вип. 7. – Харків: ХДТУБА, 1999. – С. 140-143.

Получено 24.01.2000